Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015
Licence 1ère année

Techniques Mathématiques de Base
CONTRÔLE TERMINAL - 2H

Auncun document, ni appareil multi-média n'est autorisé durant cet examen.
Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Vous veillerez à justifier soigneusement toutes vos réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsque vous ne pouvez répondre à une question, il vous est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il était demandé de démontrer.

On attribue 3 points supplémentaires pour la qualité de la rédaction

Exercice 1. (7pts)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 2x \ln x - x + 1$$

1. Donner le domaine de définition de f **[1 pt]**.
2. Calculer sa dérivée **[1 pt]**.
3. Étudier les variations de f **[1 pt]**.
4. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$ **[2 pts]**.
5. A l'aide des questions précédentes, tracer l'allure du graphe de f **[1 pt]**.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions **[1 pt]**.

Exercice 2. (6 pts)

1. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer l'intégrale suivantes **[2 pts]**
$$I := \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt.$$
2. À l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale **[1 pt]**
$$J := \int_1^e \frac{(\ln(x))^4}{x} dx.$$
3. À l'aide d'intégrations par partie, calculer les intégrales suivantes **[3 pts]** :
$$K := \int_0^1 xe^{-x} dx, \qquad L := \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx.$$

Exercice 3. (6 pts)

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle **[1+1 pts]** :

$$y'(x) + y(x) = e^{3x},$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes **[2+2 pts]**

   (a) $y''(x) - 2\,y'(x) + y(x) = x,$

   (b) $y''(x) - 4\,y'(x) + 3\,y(x) = (2x+1)\,e^{x}.$
   On pourra rechercher une solution particulière sous la forme $y_{part}(x) = (ax^2 + bx)\,e^{x}$.

Exercice 4. (4 pts)
Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

— les points $A = (1,0,1)$ et $B = (1,1,2)$,
— le plan P d'équation cartésienne $2y + 2z - 1 = 0$,
— le plan Q d'équation cartésienne $x + y = 0$.

1. Montrer que les plans P et Q se coupent en une droite dont on précisera un vecteur directeur et un point **[1 pt]**.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) **[1 pt]**.
3. Calculer un vecteur normal de P. Montrer alors que la droite (AB) est perpendiculaire au plan P et calculer les coordonnées de leur point d'intersection C **[1 pt]**.
4. Soit Δ la droite de représentation cartésienne Δ :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

   (a) Calculer un vecteur directeur de la droite Δ. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles, confondues ? **[0.5 pt]**

   (b) Donner une équation cartésienne du plan qui contient (AB) et Δ **[0.5 pt]**.